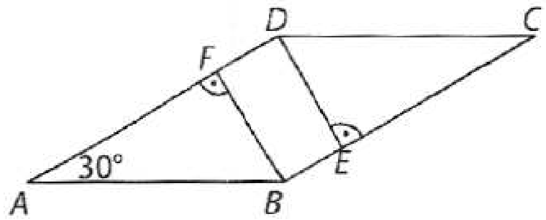
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 19.01.2018.

VII РАЗРЕД

1. На слици је приказан паралелограм $ABCD$. Из темена B и D конструисане су нормале BF и DE на наспрамне странице. Израчунај површину четвороугла $BEDF$ ако је $AB = 14\text{cm}$ и $AD = 9\sqrt{3}\text{cm}$.



2. Тачке E, F, G и H припадају, тим редом, страницама AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ тако да је $AE = 2EB$, $BF = 2FC$, $CG = 2GD$ и $DH = 2HA$. Тачке I и J су средишта дужи HE и FG, редом. Ако је површина четвороугла $HIFJ$ једнака 40cm^2, израчунај страницу квадрата $ABCD$.

3. Израчунај вредност израза $\sqrt{x-2} - \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{2} : \sqrt{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ за $x = \dfrac{9}{4}$.

4. Колико решења има једначина $||x-\sqrt{2}|-\sqrt{5}| = \sqrt{2}$? Одреди сва решења.

5. Дужине страница (изражене у центиметрима) тупоуглог троугла су цели бројеви. Ако две странице имају дужине 3cm и 4cm, израчунај обим тог троугла.

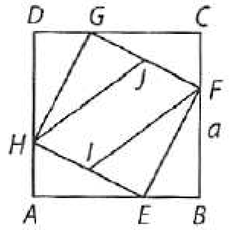
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (ML 52/1) У троуглу ABF је $BF=\frac{1}{2}AB=7\text{cm}$ [**5 бодова**] и $AF=BF\sqrt{3}=7\sqrt{3}\text{cm}$ [**5 бодова**], па је $FD=AD-AF=2\sqrt{3}\text{cm}$ [**5 бодова**]. Површина правоугаоника BEDF је $14\sqrt{3}\text{cm}^2$ [**5 бодова**].

2. (ML 52/1) Означимо страницу датог квадрата са a (слика).



Тада помоћу Питагорине теореме одређујемо страницу b четвороугла $EFGH$ (који је очигледно такође квадрат): из $b^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{5}{9}a^2$ следи $b=\frac{a\sqrt{5}}{3}$ [**5 бодова**]. Четвороугао $HIFJ$ је паралелограм са основицом HI једнаком половини странице квадрата $EFGH$ и висином једнаком тој страници, па је његова површина P једнака половини површине квадрата $EFGH$ [**5 бодова**]. Дакле, $P=\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{18}a^2=40\text{cm}^2$ [**5 бодова**], одакле је $a^2=144\text{cm}^2$ и $a=12\text{cm}$ [**5 бодова**].

3. (ML 52/1) $\sqrt{\frac{9}{4}-2}-\frac{\frac{1}{4}}{2}:\frac{9}{4}+\frac{1}{\frac{3}{2}}$ [**5 бодова**] $=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$ [**5 бодова**] $=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$ [**10 бодова**].

4. $|x-\sqrt{2}|-\sqrt{5}=\pm\sqrt{2};\ |x-\sqrt{2}|=\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$ (обе вредности су позитивне); $x-\sqrt{2}=\pm(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})$. Једначина има 4 решења:

$$x\in\{\sqrt{5}+2\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}+2\sqrt{2},-\sqrt{5}\}.$$

[Свако тачно решење: 5 бодова; свако нетачно решење −3 бода, с тим да укупан збир не буде негативан.]

5. На основу неједнакости троугла, за трећу страницу c важи $1<c<7$, тј. $c\in\{2, 3, 4, 5, 6\}$ [**5 бодова**]. За $c=5$ тај троугао је правоугли, а за $c\in\{3, 4\}$ је оштроугли [**5 бодова**]. Због $2^2+3^2<4^2$ и $3^2+4^2<6^2$, за $c\in\{2, 6\}$ троугао је тупоугли [**5 бодова**]. Задатак има два решења: $O=9\text{cm}$ или $O=13\text{cm}$ [**5 бодова**].